

1. (a) Olkoon $P(n)$ väite: $2^n \geq n^2$. Osoita, että $P(k)$:sta seuraa $P(k+1)$, kun $k = 3, 4, \dots$. Millä n :n arvoilla $P(n)$ on tosi?

(b) Määrä joukon $S = \{x_n \mid x_n = (-1)^n \frac{2n}{1+3n}, n \in \mathbb{N}\}$ supremum ja infimum, mikäli ne ovat olemassa.

2. (a) Osoita sopivaa lausetta käyttäen, että funktiolla $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x-1}\right)$ ei ole raja-arvoa pisteessä 1. (2p)

(b) Määrä raja-arvot $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$, kun

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + 1} - x\sqrt{x^2 + 1}}.$$

(4 p)

3. (a) Olkoon funktio f aidosti kasvava koko \mathbb{R} :ssä. Perustele, että f ei saa suurinta arvoaan \mathbb{R} :ssä. Päteekö tulos, jos sana 'aidosti' jätetään pois?

(b) Osoita, että suljetulla ja rajoitetulla välillä I jatkuva funktio f saavuttaa suurimman arvonsa. (Käytä hyväksi tulosta, että tällaisella välillä I jatkuva funktio on rajoitettu.)

Huom. Tentissä saa olla esillä jokin taulukkokirja ja (grafinenkin) laskin.
Muista (riittävät) perustelut kaikissa tehtävissä!