Itä-Suomen yliopisto **Tietorakenteet ja algoritmit II**

Tietojenkäsittelytieteen laitos **Uusintakuulustelu 07.06.2013**

---

1. [Yhteensä **18p**] Vastaa lyhyesti seuraaviin kysymyksiin:

   (a) Mitä asioita on otettava huomioon kun suunnitellaan algoritmia / tietorakennetta joka käyttää ulkoista muistia (esim. levyä)? Miten tällaisia algoritmeja analysoidaan?

   (b) Kerro lyhyesti mikä on "hajoita-ja-hallitse" algoritmien perusidea. Miten sellaisia algoritmeja analysoidaan?

   (c) Kerro lyhyesti mikä on peruuttavan haun idea.

2. [Yhteensä **16p**] Määritellään $f(n,k) = f(n-k,k) + f(n,k+1)$, jossa perustapaukset ovat $f(n,k) = 0$ jos $k > n$ ja $f(n,k) = 1$ jos $n = k$. Kirjoita algoritmi (pseudokoodi), joka laskee luvun $f(n,1)$ käyttämällä dynaamista ohjelmointia. Analysoi algoritmisi aikavaativuus ja tilavaativuus. (Oikein toimivasta algoritmista joka ei käytä dynaamista ohjelmointia saa 6p.)

3. [Yhteensä **18p**] Kuvaile jokin tehokas algoritmi verkon pienimmän virittävän puun löytämiseksi. Kuvauksessasi selitä algoritmin perusajatus esimerkin avulla. Selitä myös tarvittavat aputietorakenteet: mitkä ne ovat, mihin niitä tarvitaan ja millaisia operaatioita niihin kohdistuu. Sinun ei tarvitse esittää tietorakenteiden toteutusta, itse algoritmin pseudokoodia, aikavaativuusanalyysia tms. Samoin esimerkissä ei tarvitse esittää algoritmin toimintaa alusta loppuun jollain verkolla, vaan sen verran, että ajatus tulee selväksi.

4. [Yhteensä **18p**] Tee *vain yksi* seuraavista kolmesta vaihtoehdosta. Kohdissa (a) ja (b) algoritmin tehokkuus vaikuttaa arvosteluun. Kohdassa (c) pelkkä oikea vastaus ei riitä, vaan perustelut vaikuttavat arvosteluun.

   (a) Tarkastellaan suuntaamatonta painotettua verkkoa $G = (V, E)$. Kun $p = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ on mikä tahansa verkon polku, sanomme polun p pullonkaulaksi kaarta (v_{i-1}, v_i), jonka paino on polulla olevien kaarten painoista pienin. Jos sama pienin paino toistuu usealla polun p kaarella, sanomme näitä kaikkia polun p pullonkauloiksi. Kahden solmun u ja v välinen pullonkaula on kaikkien solmuja u ja v yhdistävien polkujen pullonkauloista se, joka on painoltaan suurin. Tässäkin pullonkauloja voi olla useita, jos sama paino toistuu usealla kaarella. Toisin sanoen solmujen u ja v välisen pullonkaulan paino on suurin sellainen z, että jollain polulla solmusta u solmuun v kaikkien kaarten paino on ainakin z.

   Esitä tehokas algoritmi, joka löytää annetusta verkosta annettujen kahden solmun u ja v välisen pullonkaulan. Perustele huolellisesti, että algoritmisi tosiaan löytää pullonkaulan. Jos pullonkauloja on useita, riittää löytää minä tahansa niistä. Mikä on algoritmisi aikavaativuus? Voit käyttää apuna mitä tahansa kurssilla esitettyjä algoritmeja (kirjoittamatta niiden pseudokoodia). ja niitä koskevia tuloksia.

   (b) Kirjoita algoritmi (pseudokoodi), joka selvittää onko *suunnatussa* verkossa $G = (V, E)$ sellaista kehää, joka sisältää solmun u mutta ei solmua v. Analysoi algoritmisi aikavaativuus ja tilavaativuus.

   Piirrä lisäksi vähintään kuusisolmuinen esimerkkiverkko, jossa on kaksi solmun u sisältävää kehää siten, että kehistä toinen sisältää solmun v ja toinen ei sisällä solmua v. Molemmissa kehissä tulee lisäksi olla ainakin yksi yhteinen solmu, eivätkä solmut u ja v saa olla toistensa naapureita. Miten algoritmisi etenee tässä verkossa?

   (c) Todista seuraavat väitteet joko oikeaksi tai vääräksi:

      i. Olkoon annettu suuntaamaton painotettu verkko G. Verkossa on n solmua, ja se on täydellinen, eli jokaisesta solmusta on kaari kaikkiin muihin solmuihin. Leveyssuuntainen läpikäynti tässä verkossa vaatii ajan $\Theta(n^2)$.

      ii. Olkoon annettu suuntaamaton painotettu verkko $G = (V, E)$. Jos tässä verkossa on jokin kaari $e \in E$ siten että sen paino on suurempi kuin minkä tahansa muun kaaren paino (eli $w(e) > w(e')$ kaikilla $e \neq e'$), niin kaari e ei kuulu yhteenkään verkon pienimmistä virittävistä puista.

      iii. Olkoon annettu suuntaamaton painotettu verkko $G = (V, E)$. Polku $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ on *ainoa lyhin* polku solmujen v_0 ja v_k välillä (muitakin polkuja voi olla, mutta ne ovat kaikki pidempiä). Väite: kaikki tällä polulla olevat kaaret (v_i, v_{i+1}), missä $0 \leq i < k$, kuuluvat *jokaiseen* verkon pieninpään virittävään puuhun.