Itä-Suomen yliopisto **Tietorakenteet ja algoritmit II**

Tietojenkäsittelytieteen laitos **Tentti 26.04.2013**

---

1. [Yhteensä **18p**] Vastaa lyhyesti seuraaviin kysymyksiin:

   (a) Mitä asioita on otettava huomioon kun suunnitellaan algoritmia / tietorakennetta joka käyttää ulkoista muistia (esim. levyä)? Miten tällaisia algoritmeja analysoidaan?

   (b) Kerro lyhyesti mikä on "hajoita-ja-hallitse" algoritmien perusidea. Miten sellaisia algoritmeja analysoidaan?

   (c) Kerro lyhyesti mikä on peruuttavan haun idea.

2. [Yhteensä **16p**] Määritellään $f(n,k) = f(n-k,k) + f(n,k+1)$, jossa perustapaukset ovat $f(n,k) = 0$ jos $k > n$ ja $f(n,k) = 1$ jos $n = k$. Kirjoita algoritmi (pseudokoodi), joka laskee luvun $f(n,1)$ käyttämällä dynaamista ohjelmointia. Analysoi algoritmisi aikavaativuus ja tilavaativuus.

3. [Yhteensä **18p**] Vertaile vieruslistoja ja vierusmatriiseja verkon esitysmuotoina: Mitkä ovat kummankin tärkeimmät edut ja haitat? Anna esimerkki verkkoalgoritmista, jonka tehokkuus nimenomaan edellyttää vieruslistaesitystä, ja toinen esimerkkialgoritmi, jossa tehokkuus nimenomaan edellyttää vierusmatriisiesitystä. Valitse jompi kumpi esimerkeistäsi tarkempaan tarkasteluun: esitä se pseudokoodina, analysoi sen aikavaativuutta ja selitä, mihin oletusta verkon esitysmuodosta tarvitaan, ja miten aikavaativuus muuttuisi, jos verkon esitystapa vaihdettaisiin toiseksi. Toisesta esimerkkialgoritmistasi riittää esittää lyhyesti, minkä ongelman se ratkaisee ja mikä sen aikavaativuus on; pseudokoodia tms. ei tarvitse esittää.

4. [Yhteensä **18p**] Tee *vain yksi* seuraavista kolmesta vaihtoehdosta. Kohdissa (a) ja (b) algoritmin tehokkuus vaikuttaa arvosteluun. Kohdassa (c) pelkkä oikea vastaus ei riitä, vaan perustelut vaikuttavat arvosteluun.

   (a) Sinulla on n kpl värillisiä kuutioita. Kaikki kuutiot ovat keskenään eripainoisia. Kunkin kuution jokainen sivu on maalattu eri värillä. Tehtävänä on pinota kuutioita päällekkäin, siten että tuloksena saadaan *mahdollisimman korkea* torni. Kuutioita ei saa kuitenkaan pinota miten vain, vaan tornin on noudatettava seuraavia rajoitteita:

   - Painavampaa kuutiota ei saa laittaa kevyemmän päälle.
   - Kuutioiden liittymäkohdassa on oltava sama väri; siis jokaisen kuution (paitsi alimman kuution) "pohjan" väri on oltava sama kuin sen alla olevan kuution "katon" väri.

   Mallinna ongelma verkkona, ja anna ongelmalle ratkaisualgoritmi. Riittää että algoritmi kertoo kuinka korkean tornin kuutioista voi pinota. Algoritmiksi riittää mainita sopiva kurssilla esitetty algoritmi (jos olet mallintanut ongelman "oikein"), tai vaihtoehtoisesti pseudokoodi. Kerro myös ratkaisusi aikavaativuus kuutioiden lukumäärän n funktiona.

   (b) Olkoon annettu suunnattu painotettu verkko $G = (V, E)$, ja lisäksi kaksi verkon solmua s ja t ja osajoukko $U = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_k\} \subseteq V$ (eli k kappaletta verkon G solmuja). Kaarten painot ovat positiivisia kokonaislukuja. Tehtävänä on etsiä lyhin sellainen polku solmusta s solmuun t joka kulkee ainakin yhden joukon U solmun kautta. Voit olettaa että sellainen polku on olemassa.

   Yksityiskohtaista pseudokoodia ei tarvitse esittää, vaan voit käyttää suoraan apuna kurssilla opetettuja algoritmeja kirjoittamatta niiden koodia, riittää kun kerrot mitä (mahdollisia) muutoksia niihin tarvitaan. Mikä on algoritmisi aikavaativuus?

   (c) Todista seuraavat väitteet joko oikeaksi tai vääräksi:

      i. Olkoon annettu suuntaamaton painotettu verkko G. Verkossa on n solmua, ja se on täydellinen, eli jokaisesta solmusta on kaari kaikkiin muihin solmuihin. Leveyssuuntainen läpikäynti tässä verkossa vaatii ajan $\Theta(n^2)$.

      ii. Olkoon annettu suuntaamaton painotettu verkko $G = (V, E)$. Jos tässä verkossa on jokin kaari $e \in E$ siten että sen paino on suurempi kuin minkä tahansa muun kaaren paino (eli $w(e) > w(e')$ kaikilla $e \neq e'$), niin kaari e ei kuulu yhteenkään verkon pienimmistä virittävistä puista.

      iii. Olkoon annettu suuntaamaton painotettu verkko $G = (V, E)$. Polku $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ on *ainoa lyhin* polku solmujen v_0 ja v_k välillä (muitakin polkuja voi olla, mutta ne ovat kaikki pidempiä). Väite: kaikki tällä polulla olevat kaaret (v_i, v_{i+1}), missä $0 \leq i < k$, kuuluvat *jokaiseen* verkon pieninpään virittävään puuhun.