

Diskreetti matematiikka
Loppuentti 2007

Tentissä saa olla mukana opiskelijan oma KAKSIPUOLINEN A4-luntti, joka palautetaan tenttipaperin yhteydessä. Lisäksi mukana saa olla kynä, kumi, viivain ja laskin.

Tentin mukana on myös erillinen "luntti", jossa on kaavoja ja yritetaulukko. Tee kaikki tehtävät ja katso tarkasti, mitä kysytään. Muista myös perustelut, pelkkä vastaus on noin 0,5-1 pisteen arvoinen. Maksimipistemäärä tentistä on 30 p.

1.
 - a) Kurssilla on 7 opiskelijaa. Tentin jälkeen jokainen opiskelija tahtoo verrata tenttiarvosanaansa kaikkien muiden opiskelijoiden arvosanoihin. Kuinka monta erilaista vertailuparia syntyy? (1,5p) Entä kuinka monta siinä tilanteessa, kun kurssilla on 62 opiskelijaa? (1,5p)
 - b) Kuinka monta bittijonoa $\alpha = a_1a_2a_3\dots a_{23} \in B_{23}$ on olemassa, joiden paino $wgt(\alpha) \leq 8$? (3p)

2. Ratkaise $X_n - 4X_{n-1} = 2^n - 4X_{n-2}$, $n \geq 2$ $X_0=0$ $X_1=3$ (6p)

3. Todista induktiolla, että $n^3 - 4n + 6$ on jaollinen 3:lla, kun $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ (6p)

4.
 - a) Hamming-koodaa seuraavat sanat: 1101, 1001 ja 0101 (3p)
 - b) Dekoodaa ja tarvittaessa korjaa seuraavat sanat: 1111101, 0010001 ja 0101011 (3p)

5.
 - a) Olkoon joukko $\phi = \{3, 8\}$ ja $\beta = \{d, s, k\}$. Esitä kaikki funktiot $\mu: \phi \rightarrow \beta$. Mitkä niistä ovat surjektioita, injektioita, bijektioita? (3p)
 - b) Olkoon olemassa kärki k , josta lähtee särmät kahteen kärkeen k_1 ja k_2 . Edelleen kärjestä k_1 lähtee särmät kahteen kärkeen k_{11} ja k_{12} . Samoin kärjestä k_2 lähtee särmät kahteen kärkeen k_{21} ja k_{22} jne, jne. Tätä haaroittumista tapahtuu yhteensä n kertaa. Kuinka monta kärkeä ja särmää on näin saatavassa graafissa? Graafiteoriassa tällaiselle graafille on olemassa oma nimityksensä (joku muukin kuin tasograafi), mikä se on? Totea lisäksi Eulerin teoremaa käyttäen, että kyseessä on tasograafi. (3p)

b_n	Write p_n
a	A
$a \cdot n + b$	$A \cdot n + B$
.	.
.	.
.	.
$a_r \cdot n^r + a_{r-1} \cdot n^{r-1} + \dots + a_0$	$A_r \cdot n^r + A_{r-1} \cdot n^{r-1} + \dots + A_0$
$a \cdot \lambda^n$	$A \cdot \lambda^n$
$(a \cdot n + b) \cdot \lambda^n$	$(A \cdot n + B) \cdot \lambda^n$
.	.
.	.
.	.
$(a_r \cdot n^r + a_{r-1} \cdot n^{r-1} + \dots + a_0) \cdot \lambda^n$	$(A_r \cdot n^r + A_{r-1} \cdot n^{r-1} + \dots + A_0) \cdot \lambda^n$

$$x_n = C_1 \cdot r^n \cdot \sin(n \cdot \gamma) + C_2 \cdot r^n \cdot \cos(n \cdot \gamma)$$

$$X_n = C_1 \cdot \lambda_1^n + C_2 \cdot \lambda_2^n$$

$$X_n = C_1 \cdot \lambda^n + C_2 \cdot n \cdot \lambda^n$$

	x^*y	$x^*\sim y$	$\sim x^*\sim y$	$\sim x^*y$
z^*w	1111	1011	0011	0111
$z^*\sim w$	1110	1010	0010	0110
$\sim z^*\sim w$	1100	1000	0000	0100
$\sim z^*w$	1101	1001	0001	0101

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Trigonometristen funktioiden tarkkoja arvoja

asteet	radiaanit	sin	cos	tan	cot
0	0	0	1	0	—
15	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$2 - \sqrt{3}$	$2 + \sqrt{3}$
18	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$	$\frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{5}\sqrt{25 - 10\sqrt{5}}$	$\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$
22,5	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$	$\sqrt{2} - 1$	$\sqrt{2} + 1$
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
36	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)$	$\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{5}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
54	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)$	$\frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{5}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$	$\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
67,5	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$	$\sqrt{2} + 1$	$\sqrt{2} - 1$
72	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$	$\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{5}\sqrt{25 - 10\sqrt{5}}$
75	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$2 + \sqrt{3}$	$2 - \sqrt{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	—	0
105	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$-(2 + \sqrt{3})$	$\sqrt{3} - 2$
108	$\frac{6\pi}{10}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$	$-\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$	$-\frac{1}{5}\sqrt{25 - 10\sqrt{5}}$
112,5	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$	$-\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$	$-\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$
120	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
126	$\frac{7\pi}{10}$	$\frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})$	$-\frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$	$-\frac{1}{20}(5 + 3\sqrt{5})\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}(1 - \sqrt{5})\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

asteet	radiaanit	sin	cos	tan	cot
144	$\frac{4\pi}{5}$	$\frac{1}{8}(\sqrt{5} - 1)\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$	$-\frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})$	$-\frac{1}{8}(6 - 2\sqrt{5})\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$	$-\frac{1}{20}(5 + \sqrt{5})\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$
150	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$
157,5	$\frac{7\pi}{8}$	$\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - \sqrt{\frac{1-\sqrt{2}}{2}}\right)$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$	$1 - \sqrt{2}$	$-(\sqrt{2} + 1)$
162	$\frac{9\pi}{10}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$	$-\frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{20}(5 - 3\sqrt{5})\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$	$-\frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$
165	$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$\sqrt{3} - 2$	$-(2 + \sqrt{3})$
180	π	0	-1	0	—
195	$\frac{13\pi}{12}$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$2 - \sqrt{3}$	$2 + \sqrt{3}$
210	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
225	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
240	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
255	$\frac{17\pi}{12}$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$2 + \sqrt{3}$	$2 - \sqrt{3}$
270	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	—	0
285	$\frac{19\pi}{12}$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$-(2 + \sqrt{3})$	$\sqrt{3} - 2$
300	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
315	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	-1
330	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$
345	$\frac{23\pi}{12}$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$\sqrt{3} - 2$	$-(2 + \sqrt{3})$
360	2π	0	1	0	—