

## Johdatus analyysiin

14. tammikuuta 2003

Koeaika on 4 tuntia.

Kokeessa saa olla mukana laskin ja taulukkokirja.

1. välikoe: Ratkaise tehtävät 1-4

2. välikoe: Ratkaise tehtävät 5-8

Loppukoe: Ratkaise 5 tehtävistä 2-7

Kirjoita koepaperiin selvästi näkyviin, mihin kokeeseen osallistut.

1. (a) Yhtälön

$$2z^2 + az - b = 0$$

yksi ratkaisu on  $z = -1 + i$ . Määrä vakiot  $a$  ja  $b$ .

(b) Esitä kompleksitasossa yhtälön  $|z - (2 - 5i)| = 3$  kuvaaja.

2. (a) Mitkä käyrän  $x^2 - 2xy + 2y^2 = 1$  pisteet ovat kauimpana  $x$ -akselista? Hahmottele kuvio!

(b) Olkoot funktiot  $f$  ja  $g$  määritelty siten, että yhdistetty funktio  $h = g \circ f = g(f(x))$  on määritelty. Osoita, että  $h$  on aidosti vähenevä, jos  $f$  on aidosti kasvava ja  $g$  aidosti vähenevä.

3. (a) Ratkaise yhtälö

$$3 - 3 \sin x = 2 \cos^2 x$$

(b) Laske

$$\int \frac{x^3 + 2}{x^3 + 2x^2 + 2x} dx$$

4. (a) Määritä käyrän  $\Gamma_1$ :

$$\begin{cases} x = \cos 3t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

pisteeseen  $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  piirretyn tangentin yhtälö.

(c) Laske käyrän  $\Gamma_2: r = \cos(3\varphi)$  rajoittaman tason osan pinta-ala.

5. Ratkaise seuraavat differentiaaliyhtälöt:

(a)  $y' = (y + x)^2$

(b)  $y'' - 4y' + 4y = \sin x + e^x$

6. Määrittää seuraavien lukujonojen  $(x_n)$  raja-arvot.

(a)  $x_n = n(\sqrt{n^2 + 1} - n)$

(b)  $x_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$

(c)  $x_n = \frac{\sin(n^2)}{n}$

7. (a) Osoita, että sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n}$$

suppenee. Onko suppeneminen itseistä?

(b) Lähtien sarjakehitelmästä

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2} \frac{x^{2k+2}}{2k+2} = 1 - x^2 - \frac{1}{2} \frac{x^4}{4} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^6}{6} - \dots \quad |x| < 1$$

johda sarjakehitelmä funktiolle

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Mikä on saadun sarjan suppenemissäde?

8. (a) Todista induktiolla epäyhtälö

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad x \geq -1 \text{ ja } n \in \mathbf{N}$$

(b) Määritellään jono  $(x_n)$  asettamalla

$$x_0 = 0$$

$$x_{n+1} = 2x_n + 1$$

Suppeneeko jono  $(x_n)$ ? Myönteisessä tapauksessa määritä sen raja-arvo.

---

**Kaavoja:**

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$D \sinh x = \cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$D \cosh x = \sinh x$$