Lineaarialgebra Loppukuulustelu 25.3.2002

Vastaa oheisista tehtävistä neljään (4).

1. (a) Osoita, että joukko $\{1, \sin t, t\cos t\}$ on lineaarisesti riippumaton funktioavaruudessa $\mathcal{F}$.

   (b) Perustele, että kahden lineaarikuvauksen yhdistetty kuvaus on lineaarikuvaus.

2. Tarkastellaan matriisia $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & \alpha \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ tapauksissa $\alpha = 0$ ja $\alpha \neq 0$.
   Määrää A:n ominaisarvot ja ko. ominaisavaruuksille kannat molemmissa tapauksissa. Onko A diagonalisoituva näissä tapauksissa ?

3. (a) Pitääkö (reaalisessa sisätuloavaruudessa) paikkansa väite : $\|u - v\| = \sqrt{2}$, jos u ja v ovat ortonormeeratut ? (2p)

   (b) Olkoon $f(t) = t^4$ ja H välillä [-2,2] jatkuvien funktioiden joukon aliavaruus, jonka ortonormaali kanta on $\{1/2,\ \sqrt{3}t/4,\ \sqrt{5}(3t^2 - 4)/16\}$ (sisätulo määriteltynä ko. integraalilla) . Etsi sellainen funktio $g \in H$ jolle $\|f - g\|$ on pienin kaikkien H:n funktioiden suhteen. Perustelut ! (4p)

4. Matriisin A singulaariarvot ovat $s_1 = 2\sqrt{2}$, $s_2 = \sqrt{2}$, $s_3 = 0$. Vastaavat (vasemman- ja oikeanpuoliset) singulaarivektorit ovat $u_1 = \alpha[1,0,1]^T$, $u_2 = [0,1,0]^T$, $u_3 = \alpha[1,0,-1]^T$, $v_1 = u_3$, $v_2 = u_2$, $v_3 = u_1$, $\alpha = 1/\sqrt{2}$.

   (a) Määrää pns-ratkaisu $\hat{x}$ yhtälöryhmälle Ax=b s.e. $\|\hat{x}\|$ on minimissään, kun $b = [2,1,2]^T$.

   (b) Onko $\hat{x}$ myös tarkka ratkaisu ? Onko yhtälöryhmällä muita pns-ratkaisuja ?

5. Perustele seuraavat tulokset reaaliselle neliömatriisille A : (a) Jos $A^2 = 0$, silloin 0 on ainoa A:n ominaisarvo. (b) A:n erisuuriin ominaisarvoihin liittyvät ominaisvektorit ovat ortogonaalit, jos $A^T = A$. (c) A:n määräämä neliömuoto (A symmetrinen) on positiivisesti definiitti , jos kaikki A:n ominaisarvot ovat aidosti positiivisia.

Huom. (1) Mukana saa olla taulukkokirja, laskin ja tiivistelmäpaperi (2-puolinen A4-arkki), jossa on määritelmiä, lauseita ym. tuloksia (ei todistuksia eikä tehtävien ratkaisuja). (2) Tehtävien ratkaisut tulevat ilmoitustaululle (Microtekniaan).