

Tentissä saa olla mukana kirjoitusvälineiden lisäksi laskin.

1. Määrittele/selitä seuraavat käsitteet:

- a) aksiomaattisen järjestelmän  $L$  konsistentti laajennus
- b) rajoitettu propositiokaava
- c) argumentin epäpätevyys
- d) Modus Ponens
- e) deduktiolause
- f) ensimmäisen kertaluvun  $L$ -kielen hyvin muodostettu kaava

2. a) Osoita, että propositiokaava  $((\neg p) \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$  on tautologia, kun  $p$  ja  $q$  ovat propositiomuuttujia.
- b) Osoita turvautumatta totuustauluun, että propositiokaavoille  $A$  ja  $B$  pätee  $A \equiv B$ , kun

$$A = (((\neg p_1) \vee p_2) \Rightarrow p_3) \quad \text{ja} \quad B = (\neg(\neg(p_1 \wedge \neg p_2) \wedge (\neg p_3))),$$

missä  $p_1, p_2$  ja  $p_3$  ovat propositiomuuttujia.

3. a) Muunna perustellen propositiokaava  $p \Leftrightarrow (\neg q)$  loogisesti ekvivalenttiin konjunkttiiviseen normaalimuotoon.
- b) Tutki, onko seuraava argumentti pätevä:

$$(p_1 \Rightarrow p_2), (p_1 \Rightarrow (p_3 \wedge p_4)), ((\neg p_4) \vee p_2); \therefore ((\neg p_2) \Rightarrow p_3).$$

4. Olkoon  $A, B$  ja  $C$  aksiomaattisen järjestelmän  $L$  hyvin muodostettuja kaavoja.

- a) Osoita, että

$$\{(\neg A \Rightarrow C), (B \Rightarrow (\neg A))\} \vdash_L (B \Rightarrow C).$$

- b) Osoita, että  $\vdash_L (\neg\neg B \Rightarrow (\neg B \Rightarrow A))$ .

5. Tarkastellaan  $L$ -kielen hyvin muodostettua kaavaa  $A$ ,

$$A = (\forall x_4)((\forall x_3)\neg(\forall x_2)A_1^2(x_1, x_2) \Rightarrow (\forall x_1)(A_2^2(f_1^2(x_2, x_2), x_4) \Rightarrow (\forall x_2)A_2^2(x_1, x_2))).$$

- a) Määrää kaavassa  $A$  kvanttorien vaikutusalueet ja selvitä, mitkä muuttujien esiintymät ovat vapaita ja mitkä sidottuja.
- b) Onko termi  $f_2^2(x_3, a_1)$  vapaa  $A$ :ssa muuttujan  $x_2$  suhteen? Entä muuttujan  $x_1$  suhteen?