
Todennäköisyyslaskenta, lopputentti/MV

28.2.2003

- Heitetään kahta noppaa. Laske todennäköisyys, että
 - Ainakin toinen pisteluvuista on vähintään 4.
 - Suuremman ja pienemmän pisteluvun erotus on tasan 3.
- Laatikko sisältää värillisiä palloja seuraavan taulukon mukaisesti

Laatikko	Punainen	Valkoinen	Sininen
1	3	4	1
2	1	2	3
3	4	3	2

Valitaan satunnaisesti yksi laatikko. Valitusta laatikosta nostetaan satunnaisesti yksi pallo. Havaitaan, että nostettu pallo on punainen. Millä todennäköisyydellä nostettu pallo on peräisin laatikosta numero 2?

- Rokote tuottaa immunitetin 99.99%:n varmuudella. Millä todennäköisyydellä 10000:n rokotetun joukossa korkeintaan kahdella ei ole immunitettia?
 - Heitetään noppaa, kunnes tulee silmäluku 6. Laske todennäköisyys, että tarvittavien heittokertojen lukumäärä ≥ 3 .
- Olkoon $D^2(\mathbf{x})$ satunnaismuuttujan \mathbf{x} varianssi. Olkoon $\mathbf{z} = a\mathbf{x} + b$, missä a ja b ovat vakioita.
 - Määrää \mathbf{z} :n varianssi.
 - Olkoon $\mathbf{x} \sim \text{Tas}(1, 2)$. Määrää $D^2(\mathbf{x})$.
- Olkoon satunnaismuuttujien \mathbf{x} ja \mathbf{y} yhteistiheys muotoa

$$f(x, y) = \begin{cases} k, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

Määrää ehdolliset tiheydet $f(\mathbf{x} | \mathbf{y} = y)$ ja $f(\mathbf{y} | \mathbf{x} = x)$ sekä ehdolliset odotusarvot $E(\mathbf{x} | \mathbf{y} = y)$ ja $E(\mathbf{y} | \mathbf{x} = x)$. Piirrä reunatiheyksien kuvaajat. Ovatko satunnaismuuttujat riippumattomia?

Joitakin jakaumia

$x \sim \text{Poisson}(\lambda)$ ($\lambda > 0$)

$$P\{x = k\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad E(x) = \lambda$$

$x \sim \text{Geom}(p)$ ($0 < p < 1, q = 1 - p$)

$$P\{x = k\} = pq^k, \quad E(x) = \frac{p}{q}$$

$x \sim \text{Bin}(n, p)$ ($n \in \mathbf{N}_+, 0 \leq p \leq 1, q = 1 - p$)

$$P\{x = k\} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad (k = 0, 1, \dots, n), \quad E(x) = np$$

$x \sim \text{Tas}(a, b)$ ($a < b$)

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad (a < x < b), \quad F(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

$x \sim \text{Exp}(\lambda)$ ($\lambda > 0$)

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad (x > 0)$$